

리모델링 건축물의 모달 계측 기반 강성행렬 베이스라인 설정 및 갱신 기법

Modal-Measurement-Based Baseline Stiffness Matrix Identification and Updating Method for Remodeling Building Structures

김세희* · 안재형** · 송준혁*** · 은희창****

Sehee Kim* · Jaehyoung An** · Junhyeok Song*** · Heechang Eun****

Abstract

This study presents a practical approach to estimating and updating the global stiffness matrix of existing and remodeling wall-type apartment buildings using limited modal measurements. In real applications, only a few accelerometers and a small number of low-order modes are available, so direct identification of all stiffness entries is ill-posed. To mitigate this, the building height is parameterized by a small number of zone-wise stiffness factors, and full-DOF mode shapes are reconstructed via SEREP-based expansion that combines analytical modes of an initial finite element model with measured modes at sensor locations. The zone parameters are then identified through a regularized least-squares formulation of the modal constraint equations, and a two-stage framework is adopted: Stage 1 detects the damaged zone, and Stage 2 subdivides this zone to localize the damaged story. Numerical results for a 15-story shear-type model confirm that a 30% stiffness reduction at the 8th floor can be accurately detected while maintaining small errors in the updated stiffness matrix and natural frequencies. The proposed method is suitable for establishing stiffness baselines before remodeling, tracking stiffness changes during wall demolition and construction, and supporting post-construction structural reanalysis.

Keywords: Remodeling Apartment Building, Stiffness Matrix Updating, Mode Expansion, SEREP, Zone-Wise Parameterization, Damage Detection

1. 서 론

기존 건축물의 리모델링·보수·보강 공정에서 구조 안전성을 합리적으로 평가하기 위해서는, 실제 구조계의 강성 특성을 정량적으로 파악하는 것이 필

수적이다. 그러나 완공 후 장기간이 경과한 건축물의 경우, 해석모델로부터 얻은 강성행렬이 실제 구조계와 상이한 경우가 많고, 리모델링 시공 중에는 벽체나 기둥의 철거·신설에 따라 구조성능이 시간에 따라 변한다. 따라서 센서 계측 데이터를 이용하

*강원대학교 건축공학과 박사과정(주저자: leekimsahi@kangwon.ac.kr)

**강원대학교 건축공학과 박사과정

***강원대학교 건축공학과 공학박사

****강원대학교 건축공학과 정교수(교신저자: heechang@kangwon.ac.kr)

여 해석모델의 파라미터 행렬을 갱신하고, 후속 설계·재해석에 활용 가능한 강성행렬 정보를 지속적으로 갱신하는 모델기반(model-based) 식별 기법이 필요하다.

정적 모델기반 기법은 실험실 환경이나 하중 조건이 명확한 구조물에서는 효과적이거나, 실제 건축물에서는 외력의 크기·위치를 정확히 알기 어렵고, 하중 위치나 1차 모드형상에 대한 민감도가 커서 부적절한 하중 조건에서는 갱신된 강성행렬의 오차가 커질 수 있는 한계가 있다. 반면 실제 건축물은 상시 환경 진동 하에서 운영되므로, 외력을 정확히 알지 못하더라도 운영 중 모달해석(Operational Modal Analysis)을 통해 소수의 센서만으로도 고유진동수와 부분 모드형상을 예측할 수 있으며, 이를 기반으로 하는 모달 기반 모델 갱신 및 손상 탐지에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.

Mottershead and Friswell(1993), Friswell and Mottershead(1995)는 구조 동역학 분야에서 유한 요소 모델 갱신기법을 체계적으로 정리하고, 민감도법·잔차법·최적화 기반 기법을 통해 계측 모드와 고유진동수를 이용하여 강성·질량행렬을 보정하는 방법을 제시하였다. O'Callahan et al.(1989)의 SEREP(System Equivalent Reduction Expansion Process)은 일부 자유도에서 계측된 모드형상을 기준 모델 모드와 결합하여 전 자유도의 모드형상으로 확장하는 대표적인 기법으로, 이후 Ramirez and Stolfi(2004), Maia and Silva(1997), Silva and Maia(1999)에 의해 데이터 기반·모델 기반 모드 확장 이론으로 발전하였다. Alkayem et al.(2017)은 유한 요소 모델 갱신을 이용한 손상 탐지 기법을 고찰하고 목표 함수 설정과 정규화·최적화 기법에 따라 손상 추정 성능이 크게 달라짐을 정리하였다.

계측 모드 데이터가 일부 자유도에만 제공되고 노이즈를 포함하는 경우에도, 적절한 정규화와 잔차 기반 최적화를 통해 손상 위치 및 크기를 추정할 수

있다는 연구들이 보고되었다. Law(1998)은 불완전·잡음 포함 모드 데이터로부터 부재 수준 손상을 추정하는 방법을 제안하였다. Zimmerman and Kaouk(1992)은 부분 스펙트럼 할당 및 하부공간(subspace) 회전 알고리즘을 이용하여, 제한된 모달정보에 기반한 구조 손상 검출 가능성을 제시하였다.

파라미터행렬 갱신 연구에서는, 계측된 모달 데이터나 주파수응답함수(Frequency Response Function, FRF), 잔류력(residual force)를 이용하여 강성 및 질량행렬을 직접 파라미터로 식별하는 기법이 제안되었다. Lee and Eun(2009)은 측정 모달 데이터에 일관된 강성·질량행렬을 동시에 갱신하는 방법을, Kim and Eun(2013)은 FRF 변화량에 기반한 파라미터행렬 식별 기법을 제시하였다. 또한 Eun et al.(2013)은 잔류력을 이용한 파라미터행렬 식별, 송준혁·은희창(2023)은 정적 해석모델 기반 데이터 확장과 파라미터행렬 갱신을 결합한 기법을 통해, 제한된 계측 위치의 데이터로부터 전역 자유도 수준의 강성행렬을 안정적으로 추정할 수 있음을 보였다. 이들 기본 기법을 기반으로 최근에는 구조물의 모니터링 시스템을 적용한 기술들이 개발되고 있다(김영진 외, 2011; 유찬호·백승철, 2020).

이 연구의 목적은 리모델링 대상 건축물의 강성행렬을 시간에 따라 변화하는 구조정보로서 신뢰성 있게 추정·갱신할 수 있는 모달 기반 기법을 제안하는 데 있다. 이를 통해 리모델링 전 기존 건축물의 강성 베이스라인을 설정하고, 공사 중 강성 변화 모니터링과 준공 후 구조 재해석 및 구조진전성 모니터링에 활용 가능한 정량적 평가 기반을 마련하고자 한다.

이를 위해 본 연구에서는 구조를 소수의 층·높이 구간으로 집약한 구간 강성 기반 파라미터를 도입하고, 제한된 계측 자유도에서 얻어진 부분 모드형상을 SEREP 및 의사역행렬 기반 구속 최소자승법(PINV)을 이용하여 전 자유도 모드형상으로 확장하

였다. 또한 1단계에서는 전역적으로 손상이 의심되는 구간을 식별하고, 2단계에서는 해당 구간을 세분하여 국부 손상 위치와 강성 변화를 추정하는 2단계 손상탐지·강성행렬 갱신 절차를 구성하였다. 이러한 절차를 통해 제한된 모달 계측 정보만으로도 리모델링 건축물의 강성행렬을 단계적으로 갱신할 수 있고 장기 구조물의 건전도 모니터링(structural health monitoring) 기법으로 적용 가능성을 검토하였다.

2. 계측 모드형상 데이터의 확장

2.1 선형 동적 시스템과 고유치 문제

자유도 수가 n 인 선형 탄성 구조계의 자유진동 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{\mathbf{M}}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 은 질량행렬, $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 은 강성행렬, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^n$ 은 변위 벡터이다. 조화응답을 가정하여 변위벡터 $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}_j \sin(\omega t)$ 를 식 (1) 대입하면 다음과 같은 고유치 수식을 얻는다.

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi}_j = \omega_j^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi}_j, j = 1, 2, \dots, r \quad (2)$$

여기서 $r < n$ 은 계측에 활용되는 모드의 수를 나타낸다. 식 (2)에 모드행렬 $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_r]$ 및 고유진동수 대각행렬 $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_r^2)$ 를 사용하여 다음의 수식을 얻는다.

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda} \quad (3)$$

모드행렬 $\boldsymbol{\Phi}$ 를 질량 직교화(mass-normalization)하면 다음이 유도된다.

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}_r, \quad \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda} \quad (4)$$

실제 구조계에서 계측되는 고유진동수 및 모드형상을 각각 $\omega_j^{(\text{exp})}$, $\boldsymbol{\phi}_j^{(\text{exp})}$ 라고 할 때, 이론적으로 경우 계측 모드행렬 $\boldsymbol{\Phi}_{\text{exp}}$ 는 다음을 만족한다.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\text{exp}}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_{\text{exp}} = \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\Phi}_{\text{exp}}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_{\text{exp}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\text{exp}} \quad (5)$$

여기서 $\boldsymbol{\Lambda}_{\text{exp}} = \text{diag}((\omega_1^{(\text{exp})})^2, \dots)$ 이다.

그러나 실제로 구조계물의 전 자유도에 해당하는 모드행렬 $\boldsymbol{\Phi}_{\text{exp}}$ 를 모두 계측할 수 없으므로 일부 자유도에서만 모드형상을 계측할 수 있다. 계측된 모드형상을 전 자유도로 확장하거나 동적인 시스템을 센서의 수와 동일하게 축소하여 해석을 실시한다. 데이터를 확장하고자 센서 위치를 정의하는 Boolean 행렬 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 을 사용하면, 계측 가능한 자유도에서의 모드행렬은 다음이 된다.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\text{exp},m} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}_{\text{exp}} \in \mathbf{R}^{m \times r} \quad (6)$$

여기서 $m (m < n)$ 은 센서 개수를 나타낸다. 이 연구에서는 SEREP 또는 PINV을 각각 적용하여 식 (6)의 관계인 부분 모드 $\boldsymbol{\Phi}_{\text{exp},m}$ 를 전 자유도 모드 $\boldsymbol{\Phi}_{\text{exp}}$ 로 확장한다.

2.2 SEREP 확장 기법

SEREP 확장 기법은 초기 해석모드의 부분공간에서 계측 모드형상을 선형결합으로 재구성하여 전 자유도 모드형상을 추정하는 방법이다. 이론적으로 얻은 초기 모델의 강성 및 질량행렬 $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{M}_0$ 로부터 산정된 모드행렬 $\boldsymbol{\Phi}_0$ 와, 실제 구조물 일부 자유도에서 계측된 모드형상을 결합하여 모드 확장 기법을 사용하였다.

초기 모델의 모드해석에 의한 고유치 문제는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_0 \boldsymbol{\Phi}_0 = \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\Phi}_0 \boldsymbol{\Lambda}_0 \quad (7)$$

여기서 $\boldsymbol{\Phi}_0 = [\boldsymbol{\phi}_1^{(0)}, \dots, \boldsymbol{\phi}_r^{(0)}]$ 는 선택된 r 개의 해석 모드벡터로 구성된 모드행렬이며, $\boldsymbol{\Lambda}_0$ 는 이 모델의 고유치 대각행렬이다.

전체 자유도 집합을 계측된 자유도 집합과 계측되지 않은 자유도 집합으로 구분하면, 모드행렬 $\boldsymbol{\Phi}_0$ 는 다음의 블록 형태가 된다.

$$\boldsymbol{\Phi}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{m0} \\ \boldsymbol{\Phi}_{u0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 $\boldsymbol{\Phi}_{m0}$ 과 $\boldsymbol{\Phi}_{u0}$ 는 각각 계측과 비계측 자유도에 대응하는 부분 모드행렬이다.

실제 구조물에서 특정 모드에 대한 계측은 계측 자유도에서만 얻어지므로, i ($i = 1, 2, \dots, r$) 번째 모드에 대한 계측 모드벡터를 $\boldsymbol{\phi}_{m,i}^{(meas)}$ 로 정의하면, 이는 전체 모드벡터 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_i$ 의 부분집합이 된다. 확장된 전체 모드벡터 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_i$ 를 초기 모드의 선형결합으로 다음과 같이 표현한다.

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_i \approx \boldsymbol{\Phi}_0 \mathbf{a}_i \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{a}_i$ 는 i 번째 모드에 대한 결합계수 벡터이다. 이때 계측 자유도에서의 모드형상은 다음으로 표현된다.

$$\boldsymbol{\phi}_{m,i}^{(meas)} \approx \mathbf{C} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_i = \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi}_0 \mathbf{a}_i = \boldsymbol{\Phi}_{m0} \mathbf{a}_i \quad (10)$$

여기서 결합계수 $\mathbf{a}_i$ 는 다음의 선형 최소자승 문제를

통해 추정할 수 있다.

일반화된 역행렬을 사용하여 식 (10)을 풀면 다음의 결합계수를 얻게 된다.

$$\mathbf{a}_i = \boldsymbol{\Phi}_{m0}^+ \boldsymbol{\phi}_{m,i}^{(meas)} \quad (11)$$

여기서 $(\cdot)^+$ 는 의사역행렬을 의미한다. 따라서 확장된 전체 자유도 모드벡터는 다음으로 쓸 수 있다.

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_i = \boldsymbol{\Phi}_0 \mathbf{a}_i = \boldsymbol{\Phi}_0 \boldsymbol{\Phi}_{m0}^+ \boldsymbol{\phi}_{m,i}^{(meas)} \quad (12)$$

이를 여러 모드에 의한 계측 모드행렬 $\mathbf{Y}_{meas} = [\boldsymbol{\phi}_{m,1}^{(meas)}, \dots, \boldsymbol{\phi}_{m,r}^{(meas)}]$ 로 표현된다.

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{full} = \boldsymbol{\Phi}_0 \boldsymbol{\Phi}_{m0}^+ \mathbf{Y}_{meas} \quad (13)$$

여기서 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{full}$ 은 작은 각 모드에 대해 전 자유도로 추정된 모드형상행렬을 나타낸다.

2.3 PINV 확장 기법

PINV 확장 기법은 계측 자유도에서의 모드값을 만족시키면서 초기 해석모드로부터의 수정량을 최소화하는 최소자승 문제로 정식화된다. i 번째 모드에 대해, 초기 해석모드를 $\boldsymbol{\phi}_{0,i} \in R^n$, 계측 모드값을 $\boldsymbol{\phi}_{m,i}^{(meas)} \in R^m$ 라 하여 다음과 같은 목적함수를 최적화한다.

$$\min_{\hat{\boldsymbol{\Phi}}_i} \|\hat{\boldsymbol{\Phi}}_i - \boldsymbol{\phi}_{0,i}\|_2^2 \quad (14)$$

PINV를 기반한 모드 확장은 다음으로 유도된다.

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_i = \boldsymbol{\phi}_{0,i} + \mathbf{C}^+ (\boldsymbol{\phi}_{m,i}^{(meas)} - \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_{0,i}) \quad (15)$$

각 모드에 대해 센서 자유도에서의 크기와 위상을 맞추기 위한 정규화를 수행한다.

2.4 SEREP와 PINV 기법의 비교

SEREP는 초기 해석모드의 부분공간을 활용하여 전체 형상 재현에 유리하고, PINV는 센서 제약을 직접 반영하여 계측 자유도 일치에 유리하다. 본 연구에서는 식 (13)과 식 (15)로 확장된 전 자유도 모드 형상행렬을 이용하여 이후 강성행렬 갱신 성능을 비교하였다.

(수치실험 1: 모드 확장 성능 비교)

이 수치예제에서는 SEREP와 PINV 기법을 사용하여 수 개소에서 측정된 모드형상을 전 자유도로 확장한 결과를 비교한다. 구조물은 각 층의 수평변위 u_i ($i = 1, 2, \dots, 15$)의 자유도를 갖는 지상 15층 규모의 철근콘크리트 건축물로 1차원 전단형(1D shear-type) 다자유도 시스템으로 등가 이상화하였다(Fig. 1). 본 모델은 층별 수평 자유도 중심의 전역 거동으로 단순화하였으므로 3차원 거동, 부재별·층별 비균질 강성, 평면 및 입면의 비정형성, 비틀림 연성 효과 등은 직접적으로 반영하지 못하였다. 건물은 집중질

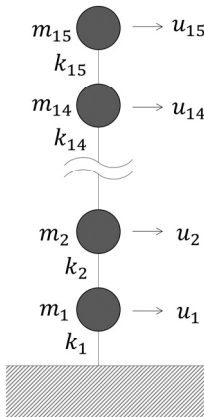


Fig. 1. A Dynamic Model of a 15 Story Building Structure

량(lumped mass)으로 약 4.0×10^5 kg, 모든 층에 동일한 강성 1.0×10^8 N/m의 정형 구조물을 가정하였다.

건물의 손상 탐지와 손상된 건축물의 강성행렬을 갱신하고자 다음의 시나리오로 수치실험을 실시하였다. 건물의 8층에 층간 강성이 기준값의 70% 수준으로 감소한 것으로 가정하였으며, 센서는 3층, 7층, 11층, 15층에 해당하는 네 개 층에 가속도계 부착하여, 수평 응답만을 계측하도록 하고 있다. 이 네 위치는 저층·중층·상층 및 최상층을 임의로 대표하는 층으로 선택되어, 소수의 센서로 전체 구조 거동을 대표할 수 있도록 배치된 것이다. 실제 계측에서는 각 센서 위치에서 1~3차 저차 모드의 모드형상 및 고유진동수를 추출하고, 여기에 약 2% 수준의 모드형상 노이즈와 0.5% 수준의 주파수 노이즈가 포함되어 있다고 가정하여 실제 현장에서의 계측 오차와 환경 영향을 모사하였다. 전 자유도와 센서위치에서의 실제 값에 의한 다음의 Frobenius 노름 기반 상대오차(relative error)를 사용하였다.

$$e_{full,i} = \frac{\|\phi_{est,i} - \phi_{true,i}\|_2}{\|\phi_{true,i}\|_2} \times 100(\%),$$

$$e_{sens,i} = \frac{\|C\phi_{est,i} - C\phi_{true,i}\|_2}{\|C\phi_{true,i}\|_2} \times 100(\%),$$

여기서, $e_{full,i}$ 와 $e_{sens,i}$ 는 각각 i 번째 모드에 해당하는 전 자유도와 센서위치에서 추정된 값과 실제 값과의 오차를 나타낸다. 첨자 est 와 $true$ 는 추정치와 실제 값을 의미한다. 또한 다음의 MAC(Modal Assurance Criterion)을 사용하여 일치도를 평가하였으며, Table 1에 수치실험결과를 요약하였다.

$$MAC = \frac{|\phi_{est,i}^T M \phi_{true,i}|_2}{(\phi_{est,i}^T M \phi_{true,i})(\phi_{true,i}^T M \phi_{est,i})}$$

Table 1. Comparison of Modal Expansion Performance

Mode	SEREP (%)			PINV (%)		
	Full	Sens.	MAC	Full	Sens.	MAC
1st	8.15	7.19	99.4	1.27	0.60	99.9
2nd	5.93	4.69	99.6	3.22	1.18	99.0
3rd	9.76	8.49	99.0	6.01	2.51	99.6

이 표에서 Full은 전 자유도를, Sens은 센서 자유도를 의미한다. MAC는 $0 \leq \text{MAC} \leq 1$ 의 범위에 있으며, 1에 가까울수록 두 모드형상이 거의 동일하고, 0에 가까울수록 완전히 다른 형상에 가깝게 된다. 이 표에 의하면 PINV가 SEREP보다 전반적으로 작은 오차와 높은 MAC 값을 나타내었다. 특히 1~3차 모드 모두에서 PINV의 전 자유도 및 센서 자유도 오차가 더 작게 평가되어, 기준모델이 적절한 경우에는 모드 재현 정확도가 우수함을 확인할 수 있다. 다만 실제 적용에서는 계측 노이즈와 모델 불확실성에 대한 민감도를 함께 고려할 필요가 있다.

3. 강성행렬 갱신

3.1 질량 정규화된 강성행렬

질량행렬의 대칭 제곱근 $\mathbf{M}^{1/2}$ 과 그 역 $\mathbf{M}^{-1/2}$ 를 이용하여, 질량이 단위행렬이 되는 공간에서의 강성행렬을 다음으로 정의하였다.

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} \quad (16)$$

또한 $\mathbf{U} = \mathbf{M}^{1/2} \boldsymbol{\Phi}$ 라 하면 식 (4)의 질량 직교화 조건과 모드강성 조건은 다음으로 표현된다.

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_r, \quad \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \boldsymbol{\Lambda} \quad (17)$$

즉, $\hat{\mathbf{K}}$ 는 질량이 단위행렬인 좌표계에서의 강성행

렬이고, 그 모드공간 블록은 $\boldsymbol{\Lambda}$ 와 일치해야 한다.

동일하게 해석모델 강성행렬 $\mathbf{K}_a$ 도 다음으로 쓸 수 있다.

$$\hat{\mathbf{K}}_a = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K}_a \mathbf{M}^{-1/2} \quad (18)$$

3.2 최소 교정량 기반 갱신 문제의 정식화

질량 직교화된 모드행렬 $\mathbf{U}$ 와 계측 고유진동수 $\boldsymbol{\Lambda}_{\text{exp}}$ 가 주어졌다고 할 때, 질량 정규화 공간에서의 강성행렬 갱신 문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{K}}} \quad & \|\hat{\mathbf{K}} - \hat{\mathbf{K}}_a\|_F^2 \quad \text{subject to} \\ & \hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}}^T, \quad \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \boldsymbol{\Lambda}_{\text{exp}} \end{aligned} \quad (19)$$

해석모델 $\hat{\mathbf{K}}_a$ 로부터 Frobenius 노름에서 가장 근사한 대칭행렬 $\hat{\mathbf{K}}$ 중에서, 모드공간 블록이 계측 모달 강성 $\boldsymbol{\Lambda}_{\text{exp}}$ 와 일치하도록 한다.

강성행렬의 교정량을 모드공간에만 투영한다고 가정하여,

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}}_a + \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^T \quad (20)$$

여기서 $\boldsymbol{\Lambda} \in R^{r \times r}$ 는 대칭 행렬로, 모드공간에서의 보정 블록이다. 제약식 $\mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \boldsymbol{\Lambda}_{\text{exp}}$ 을 식 (20)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$\mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}}_a \mathbf{U} + \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_{\text{exp}} \quad (21)$$

식 (21)로부터

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_{\text{exp}} - \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}}_a \mathbf{U} \quad (22)$$

식 (22)를 식 (20)에 대입하면 갱신된 강성행렬은

다음과 같이 된다.

$$\hat{\mathbf{K}}_{upd} = \hat{\mathbf{K}}_a + \mathbf{U}(\mathbf{A}_{exp} - \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}}_a \mathbf{U}) \mathbf{U}^T \quad (23)$$

이를 원래 좌표계로 환원하면, 다음과 같은 갱신된 강성행렬을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{upd} &= \mathbf{M}^{1/2} \hat{\mathbf{K}}_{upd} \mathbf{M}^{1/2} \\ &= \mathbf{K}_a + \mathbf{M} \Phi (\mathbf{A}_{exp} - \Phi^T \mathbf{K}_a \Phi) \Phi^T \mathbf{M} \end{aligned} \quad (24)$$

(수치실험 2: 전역 강성행렬 갱신 성능 비교)

Table 2는 (수치실험 1)과 동일한 구조물에서 SEREP와 PINV를 사용하여 확장된 모드형상행렬을 식 (24)에 사용하여 갱신된 강성행렬을 실제 강성행렬과 비교한 결과이다. 이 표에 따르면, 8층 강성이 3% 저하된 경우에는 SEREP와 PINV 모두 매우 작은 전역 강성행렬 오차를 보여 두 기법 모두 정확한 갱신이 가능하였다. 반면 30% 손상에서는 두 기법 모두 오차가 증가하였으나, 전역 강성행렬 오차는 약 6~7% 수준으로 유지되었다. 따라서 전역 강성행렬 수준의 갱신에서는 두 기법 모두 일정 수준 이상의 성능을 보였으며, 세부적인 모달 재현 특성에서는 차이가 나타났다.

Table 2. Comparison of Circular Natural Frequencies According to the First Three Modes

Mode	3% Damage/30% Damage		
	True (rad./sec.)	SEREP (rad./sec.)	PINV (rad./sec.)
1st	1.6000/ 1.5788	1.0661/ 1.1129	1.5756/ 1.5633
2nd	4.7845/ 4.7330	4.6574/ 4.6335	4.7831/ 4.7069
3rd	7.9165/ 7.7927	7.9114/ 7.7844	7.9130/ 7.7618

3.3 요소 강성의 파라미터화와 목적함수 정식화

각 요소의 기준(reference) 강성행렬을 $\mathbf{K}_{e0}$ 라 하면, 해당 요소의 상대 강성계수 θ_e 를 곱하는 형태로 요소 강성을 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{K}_e(\theta_e) = \theta_e \mathbf{K}_{e0} \quad (25)$$

여기서, $\theta_e = 1$ 이면 기준, 강성변화가 없음

$\theta_e < 1$ 이면 강성 감소(손상)

$\theta_e > 1$ 이면 강성 증가(보강)

이를 사용할 때에 전역 강성행렬은 다음으로 표현된다.

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{A}_e^T \theta_e \mathbf{K}_{e0} \mathbf{A}_e \quad (26)$$

여기서, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n_e}]^T$ 는 요소 상대 강성 파라미터 벡터를, $\mathbf{A}_e$ 는 e 번째 요소의 자유도를 전역 자유도에 연결해 주는 Boolean 행렬을 나타낸다. 식 (26)의 강성행렬이 계측 데이터를 이용하여 갱신된 $\hat{\mathbf{K}}$ 에 수렴하도록 $\boldsymbol{\theta}$ 를 추정하는 해석과정을 Fig. 2에 나타냈다.

Frobenius 노름을 사용한 다음의 최소자승법을 적용하여 강성행렬을 갱신하였다.

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) - \hat{\mathbf{K}}\|_F^2, \quad \theta_e > 0 \quad (27)$$

추가로 $\theta_e \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ 와 같은 범위로 구속조건을 부여할 수도 있다. 식 (27)은 비선형의 최적화 문제이지만 요소 강성의 변화가 크지 않다고 가정하면 기존 해석모델 $\mathbf{K}_a$ 주변에서 선형화를 취하게 된다. 즉, 해석모델의 요소 강성은 $\theta_{e,a} = 1$ 에 해당하므로

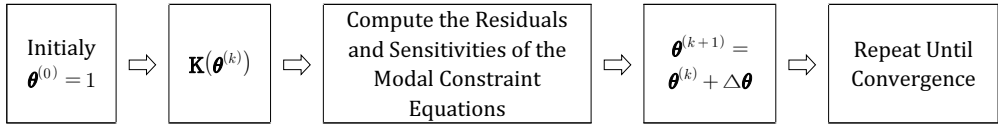


Fig. 2. Flowchart to Establish the Element-Wise Relative Stiffness Factor

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{K}(\theta_a) = \sum_e \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_{e0} \mathbf{A}_e \quad (28)$$

또한, 요소의 상대 강성의 변화량 벡터는 다음이 된다.

식 (28)에 $\theta = \theta_a + \Delta\theta$ 와 테일러 급수를 적용하면

$$\Delta\theta = \theta - \theta_a \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &\approx \mathbf{K}(\theta_a) + \sum_e \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_e} \theta_a \Delta\theta_e \\ &= \mathbf{K}_a + \sum_e \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_{e0} \mathbf{A}_e \Delta\theta_e \end{aligned} \quad (29)$$

식 (31b)는 계측으로부터 얻어진 $\Delta\mathbf{K}$ 와 미지의 요소 파라미터 변화 $\Delta\theta$ 사이의 근사관계를 나타낸다. 이 식에 계측 오차와 모델링 오차에 의한 잡음 ϵ 을 고려하면 다음이 된다.

전역의 강성 변화량은 $\Delta\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}} - \mathbf{K}_a$ 이므로 이를 다음과 같이 근사식으로 나타낼 수 있다.

$$\text{vec}(\Delta\mathbf{K}) = \mathbf{S} \Delta\theta + \epsilon \quad (34)$$

$$\Delta\mathbf{K} \approx \sum_e \mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_{e0} \mathbf{A}_e \Delta\theta_e \quad (30)$$

따라서 $\Delta\theta$ 는 다음의 선형 최소자승 문제의 해로 추정하게 된다.

이 식을 벡터화 연산을 이용하여 선형 대수 형태로, 행렬 $\mathbf{X}$ 를 열 방향으로 나열한 벡터 $\text{vec}(\mathbf{X})$ 형태인 다음으로 표현된다.

$$\Delta\theta = \arg \min_{\Delta\theta} \|\mathbf{S} \Delta\theta - \text{vec}(\Delta\mathbf{K})\|_2^2 \quad (35)$$

$$\text{vec}(\Delta\mathbf{K}) \approx \sum_e \text{vec}(\mathbf{A}_e^T \mathbf{K}_{e0} \mathbf{A}_e) \Delta\theta_e \quad (31a)$$

정규화 항이 없는 경우 최소자승 해는 다음이 된다.

$$\begin{aligned} &\text{혹은} \\ &\overrightarrow{(\Delta\mathbf{K})} \approx \mathbf{S}(\Delta\theta) \end{aligned} \quad (31b)$$

$$\Delta\theta = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \text{vec}(\Delta\mathbf{K}) \quad (36)$$

여기서, 각 요소 강성에 대한 전역 강성의 민감도를 열로 모은 민감도행렬(sensitivity matrix) $\mathbf{S}$ 는 다음으로 표현된다.

그러나 민감도행렬 $\mathbf{S}$ 가 행렬의 열 사이에 상관성이 크거나 문제가 근본적으로 ill-conditioned한 경우 수치적으로 불안정할 수 있으므로 다음과 같은 Tikhonov 정규화를 적용하였다.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{(\mathbf{A}_1^T \mathbf{K}_{10} \mathbf{A}_1)} & \overrightarrow{(\mathbf{A}_2^T \mathbf{K}_{20} \mathbf{A}_2)} & \dots \\ \overrightarrow{(\mathbf{A}_{n_e}^T \mathbf{K}_{n_e0} \mathbf{A}_{n_e})} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\Delta\theta = (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{S}^T \text{vec}(\Delta\mathbf{K}) \quad (37)$$

여기서 $\lambda > 0$ 은 정규화 파라미터이며, 값이 클수록

파라미터 변화량의 크기를 억제하여 안정성을 높이
지만 데이터의 적합도는 감소한다. 본 연구에서는 후
보 λ 값들에 대해 잔차 크기와 해의 안정성을 비교
검토한 후, 두 기준이 균형을 이루는 값을 최종 정규
화 파라미터로 채택하였다.

궁극적으로 갱신된 요소 상대 강성계수 θ_{upd} 는 다
음이 된다.

$$\theta_{upd} = \theta_a + \Delta \theta \quad (38)$$

이를 각 요소 강성행렬에 대입하면 요소의 강성행렬
과 전역 갱신된 강성행렬을 각각 다음과 같이 얻게
된다.

$$K_e^{(upd)} = \theta_{e,upd} K_{e0} \quad (39a)$$

$$\mathbf{K}^{(upd)} = \mathbf{K}(\theta_{upd}) \quad (39b)$$

(수치실험 3: 구간 강성 파라미터 기반 강성행렬 갱신)
(수치실험 1)과 동일한 15층 건물을 3개의 구간으
로 구분하고 8층의 강성행렬의 손상을 감안하고 식
(39b)를 적용하여 갱신된 강성행렬을 추정하였다. 8
층의 강성이 3%와 30% 저하를 감안한 전역 강성행
렬 오차는 다음으로 정의하였다.

$$\text{SEREP: } \frac{\|\mathbf{K}_{SEREP} - \mathbf{K}_{true}\|}{\|\mathbf{K}_{true}\|}$$

$$\text{PINV: } \frac{\|\mathbf{K}_{PINV} - \mathbf{K}_{true}\|}{\|\mathbf{K}_{true}\|}$$

Table 3과 Table 4는 구간 강성 파라미터 기반 갱
신 결과를 비교한 것이다. 작은 손상(3%)에서는 두
기법 모두 허용 가능한 정확도를 보였으나, 큰 손상
(30%)에서는 PINV 기반 갱신의 오차가 급격히 증
가하여 수치적으로 불안정한 결과를 나타냈다. 반면
SEREP 기반 갱신은 손상 규모가 커져도 비교적 안

Table 3. Comparison of θ Values

Zone	True	3% Damage / 30% Damage	
		SEREP	PINV
Z1	1.0	0.985 / 0.885	0.946 / 0.011
Z2	0.970	0.988 / 0.870	0.949 / 0.012
Z3	1.0	0.989 / 0.871	0.975 / 0.060

Table 4. Comparison of Circular Natural Frequencies
According to the First Three Modes Based
Element-Wise Stiffness Approach

Mode	3% Damage / 30% Damage (rad./sec.)		
	True	SEREP	PINV
1st	1.5933 / 1.4955	1.5925 / 1.4954	1.5728 / 0.2333
2nd	4.7673 / 4.5311	4.7581 / 4.4821	4.6836 / 0.6775
3rd	7.8851 / 7.4475	7.8754 / 7.4204	7.7442 / 1.0670

정적인 강성행렬 및 고유진동수 재현 성능을 유지하
였다. 따라서 본 연구에서는 후속 2단계 손상탐지 절
차의 기반 기법으로 SEREP를 채택하였다.

4. 2단계 손상탐지기법

전 자유도 강성행렬의 모든 성분을 직접 미지수로
두고 손상 민감도나 PINV 기법을 이용해 추정하는
전역 기반 기법은, 구속조건에 비해 미지수가 과도
하게 많아져 심각한 ill-conditioned 문제를 야기한
다. 그 결과, 전역 강성행렬은 수치적으로 불안정하
게 추정되고, 특정 층이나 부재에 국부 손상이 존재
함에도 불구하고, 전체에 걸쳐 균일한 강성저하가
있는 것처럼 왜곡된 결과를 얻기 쉽다. 손상이 비교
적 국부적인 경우, 전역 수준에서 한 번에 손상 위치
까지 구분해 내는 것은 더욱 어렵다. 소수의 센서와
저차 모드만으로는 손상 위치 정보가 구조 전체에
분산되기 때문에, 손상 영향이 하나의 구간 또는 여
러 층에 흩어지는 현상이 발생하며, 손상 영역과 손

상층을 동시에 높은 정밀도로 추정하기 어렵다.

따라서 이 연구에서는 1단계에서 손상이 발생한 구간을 추정하고, 2단계에서 그 구간 안에서 어느 하부 구간에 가장 손상되었는지를 세밀하게 추적하게 된다. 역문제의 자유도는 줄이면서도 손상 탐지의 공간 분해능력을 확보하고 이후의 해석을 위해 강성 행렬을 갱신하게 된다. 이 과정을 Fig. 3에 요약하였으며, 안정적인 결과를 얻기 위해 PINV 보다는 SEREP 기법을 적용하였다.

15층 전단형 건축물을 높이 방향으로 세 개의 구간(Zone 1: 1-5층, Zone 2: 6-10층, Zone 3: 11-15층)으로 구분하고, 각 구간에 대해 상대 강성계수 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 를 반복적으로 추정하였다. Fig. 2에 따라 벡터 θ 는 반복 갱신하여 최종적으로 $[0.978 \ 0.931 \ 1.007]$ 을 얻었다. 이에 따라 1단계에서 도출된 구간별 강성은 세 구간 중 6-10층이 포함된 Zone 2의 상대 강성계수가 가장 크게 감소한 것으로 나타나, 수치모델과 정성적으로 일치하는 결과를 보였다. 이때 갱신된 강성행렬과 실제 강성행렬 사이의 Frobenius 노름 기준 상대오차는 약 0.0564(약 5.6%)로 산정되어 비교적 양호한 정밀도로 전역 강성이 갱신되었음을 확인할 수 있다.

1단계에서 손상 가능성이 가장 높은 영역으로 판정된 Zone 2(6-10층)를 세분화하여, 전체 구조를 총 5개의 구간(Z1: 1-5층, Z2a: 6-7층, Z2b: 8층, Z2c: 9-10층, Z3: 11-15층)으로 재모델링하였다. SEREP 기반 모달 구축식과 Tikhonov 정규화를 적용하여 세분 구간별 상대 강성계수 θ 를 반복적으로 갱신하여 $[1.003 \ 0.906 \ 0.902 \ 0.909 \ 1.014]$ 의 θ 를 얻었다. 2단계 최종 결과를 정리하면, Z2b(8층)의 $\theta = 0.902$ 가 다섯 구간 중 가장 작은 값을 나타내어, 실제 손상이 8층에만 존재하도록 부여한 조건과 정확히 일치하였다. 2단계 갱신 후 전역 강성행렬의 Frobenius 상대오차는 약 0.0565(약 5.7%)로, 1단

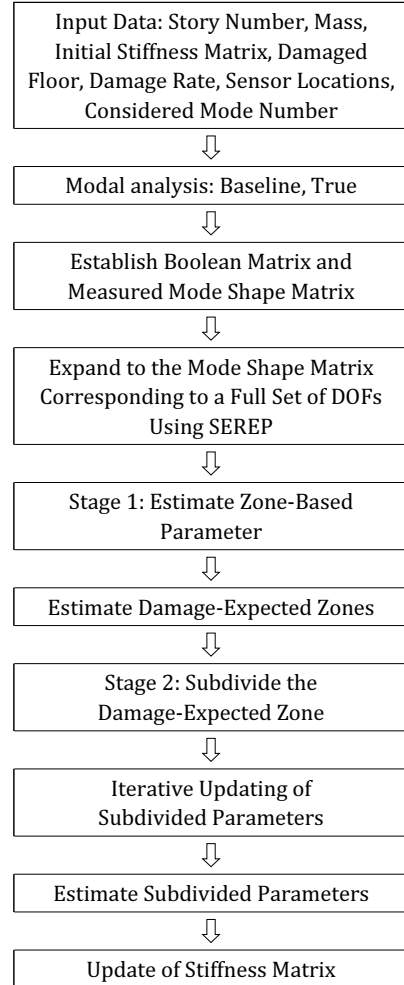


Fig. 3. Flowchart for Two Stage Damage Detection Scheme

계 결과와 거의 동일한 수준을 유지하였다. 이는 전역 강성 재현 성능을 만족하며 손상 위치 식별 능력만 추가로 향상시킬 수 있었다.

2단계에서 갱신된 강성행렬에 대해 재차 모달 해석을 수행한 결과, 1~3차 고유진동수는 각각 $\omega_{true} = 1.579 \text{ rad./sec.}, 4.733 \text{ rad./sec.}, 7.793 \text{ rad./sec.}$ 에 대해 $\omega_{cst} = 1.576 \text{ rad./sec.}, 4.734 \text{ rad./sec.}, 7.816 \text{ rad./sec.}$ 로 평가되었다. 각 모드별 상대오차는 대략 0.1~0.3% 수준에 불과하며, 이는 갱신된 강성행

렬이 매우 높은 정밀도로 재현하고 있음을 의미한다. 특히, 센서가 4개 층에만 설치되고, 저차 3개 모드만을 계측·활용한 조건에서도 전역 강성행렬의 오차를 약 5~6% 수준으로 억제하면서, 고유진동수는 1% 이내의 오차로 복원되고, 손상이 발생한 구간과 층을 모두 정확히 식별할 수 있음을 확인하였다. 이 결과는 제안된 SEREP 기반 2단계 구간 파라미터 갱신 기법이 계측 자유도와 모드 수가 제한된 상황에서도 전역 강성 갱신과 손상 위치 추정에 효과적으로 활용될 수 있는 것으로 판단된다.

5. 결 론

본 연구에서는 제한된 모달 계측 정보를 이용하여 구조물의 구조 강성을 단계적으로 추정하고 손상 위치를 식별하기 위한 2단계 모달 기반 강성 갱신 기법을 제안하였다. 제안 기법은 다음과 같은 절차적 특징과 성능을 갖는다.

- (1) 구조를 높이 방향으로 소수의 구간으로 구분하고, 각 구간에 상대 강성계수를 추정함으로써, 전역 강성행렬의 자유도를 크게 축소하였다. SEREP 기반 모드 확장과 Tikhonov 정규화 최소화승을 결합한 1단계 알고리즘을 통해, 소수의 센서와 저차 모드만으로도 전역 강성행렬은 약 5~6% 수준의 Frobenius 상대오차 내에서 갱신되었으며, 동시에 손상이 존재하는 구간이 안정적으로 식별되었다.
- (2) 2단계에서는 1단계에서 손상이 의심되는 구간을 다시 세분하여 각 세분 구간에 대한 상대 강성계수를 반복적으로 갱신하였다.
- (3) 본 연구에서 제안한 2단계 모달 기반 강성 갱신 기법은 손상 위치 식별 자체에 그치는 것이 아니라, 리모델링 전·중·후의 각 시점에서 구조물의 전역 강성행렬을 일관된 방식으로 추정·갱신할

수 있는 절차적 프레임워크를 제공하였다.

- (4) SEREP 및 PINV 기반 모드 확장 기법을 비교한 결과, 계측 모드에 적절한 정규화와 선택 행렬을 적용할 경우, 두 기법 모두 전 자유도 모드형상 재현에 대해 높은 정밀도를 보였다. 특히 PINV 기반 모드 확장은 계측 DOF에서의 모드 일치를 엄밀히 보장하는 장점이 있으며, SEREP 기반 기법은 시스템 동특성에 보다 직접적으로 연계된 축소·확장 절차를 제공한다는 장점이 있다.

본 연구는 제안 기법의 타당성을 검토하기 위한 초기 단계의 연구로서, 3차원 거동과 같은 복합 거동 특성을 충분히 반영하지 못하였다. 향후에 3차원 유한요소 모델을 대상으로 제안 기법을 추가적으로 검증할 필요가 있다.

참고문헌

1. 김영진·박승희·진규남·이창길(2011), "셀프센싱 상시계측 기반 CFRP보강 콘크리트 구조물의 손상감색", 『LHI Journal』, 2(4): 407~413.
2. 송준혁·은희창(2023), "정적모델기반의 데이터 확장 및 파라미터행렬의 갱신", 『대한건축학회논문집』, 39(1): 241~248.
3. 유찬호·백승철(2020), "스마트시티 IoT플랫폼 구축을 위한 자율사물 모니터링 시스템 적용성 평가", 『LHI Journal』, 11(1): 103~108.
4. Alkayem, N. F., M. Z. Abdalla, M. I. Friswell and K. Worden (2017), "Structural Damage Detection Using Finite Element Model Updating: A Review", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 87: 217~228.
5. Eun, H.-C, R.-J. Kim and Y.-J. Ahn (2013), "Identification of Parameter Matrices Using Residual Force Vector", *Applied Mechanics and Materials*, 394: 157~162.
6. Friswell, M. I. and J. E. Mottershead (1995), *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

7. Kim, J.-B. and H.-C. Eun (2013), "Identification of Parameter Matrices Using Estimated FRF Variation", *Journal of Vibroengineering*, 15(1): 124~131.
8. Law, S. S. (1998), "Structural Damage Detection from Incomplete and Noisy Modal Test Data", *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 124(11): 1280~1288.
9. Lee, E.-T. and H.-C. Eun (2009), "Update of Corrected Stiffness and Mass Matrices Based on Measured Dynamic Modal Data", *Applied Mathematical Modelling*, 33(5): 2274~2281.
10. Maia, N. M. M. and J. M. M. Silva (1997), *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Taunton: Research Studies Press.
11. Mottershead, J. E. and M. I. Friswell (1993), "Model Updating in Structural Dynamics: A Survey", *Journal of Sound and Vibration*, 167(2): 347~375.
12. O'Callahan, J. C., P. Avitabile and R. Riemer (1989), "System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)", *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Las Vegas, NV, 29~37.
13. Ramirez, J. M. and S. A. Stolfi (2004), "Mode Shape Expansion from Data-Based and Model-Based Techniques", *Mecánica Computacional*, 23: 1883~1898.
14. Silva, J. M. M. and N. M. M. Maia (eds.) (1999), *Modal Analysis and Testing, NATO Science Series E*, Vol. 363, Dordrecht: Springer.
15. Zimmerman, D. C. and M. Kaouk (1992), "Structural Damage Detection Using a Subspace Rotation Algorithm", *Proceedings of the 33rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Dallas, TX.

요 약

본 연구의 목적은 기존 및 리모델링 건축물에 대해, 제한된 모달 계측 정보만으로 전역 강성행렬을 추정·갱신하는 방법을 제안하는 데 있다. 일부 층의 가속도계에서 얻은 저차 모드만으로는 강성행렬 성분을 직접 식별하기 어려우므로, 본 연구에서는 건물을 높이 방향 구간(준) 파라미터로 단순화하고, 초기 유한요소 해석 모드와 계측 모드를 결합한 SEREP 기반 모드 확장을 사용하였다. 확장된 모드와 계측 고유진동수를 이용해 모달 제약식의 잔차를 최소화하는 정규화 최소자승 문제를 반복적으로 풀어 구간별 상대 강성계수를 식별한다. 수치실험에 사용된 15층 아파트 건축물을 전역 3구간 식별 후 손상 의심 구간을 세분화하는 2단계 손상 탐지 절차를 도입하여, 강성행렬을 갱신하였으며, 15층 모형에서 8층 30% 강성 저하를 탐지하였다. 제안 기법은 리모델링 전 강성 베이스라인 설정, 공사 중 강성 변화 모니터링, 준공 후 구조 재해석에 활용 가능한 실무형 도구가 될 수 있다.

주제어: 리모델링, 강성행렬 갱신, 모드 확장, SEREP, 구간 파라미터, 손상 탐지